Corrigé du sujet d'examen - E3 - Communiquer dans des situations et des contextes variés - BTSA VO (Viticulture-Œnologie) - Session 2015

1. Rappel du contexte

Ce sujet d'examen aborde des thèmes liés aux probabilités et à l'analyse statistique, en lien avec la consommation de fruits et légumes. Les étudiants doivent démontrer leur capacité à manipuler des variables aléatoires, à appliquer des lois de probabilité et à interpréter des résultats statistiques.

Correction question par question

Exercice 1

1. Vérifier que le tableau ci-dessus est bien celui de la loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires.

Il faut vérifier que la somme des probabilités dans le tableau est égale à 1.

Calcul :

- Somme = 0 + 0,01 + 0,03 + 0,05 + 0,02 + 0,12 + 0,15 + 0,03 + 0,05 + 0,08 + 0,1 + 0,07 + 0,04 + 0,15 + 0,08 + 0,02
- Somme = 1

Conclusion : Le tableau est bien celui d'une loi de probabilité.

2. Déterminer la probabilité qu'une personne interrogée n'ait consommé aucun fruit et aucun légume.

Nous cherchons P(X=0, Y=0) qui est donné dans le tableau.

Réponse : P(X=0, Y=0) = 0.

3. Déterminer P(X=0) puis P(Y=0).

P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=3) = 0 + 0,01 + 0,03 + 0,05 = 0,09.

P(Y=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=3, Y=0) = 0 + 0,02 + 0,05 + 0,04 = 0,11.

4. Justifier que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Pour que X et Y soient indépendantes, P(X=x, Y=y) doit être égal à P(X=x) * P(Y=y) pour toutes les valeurs de x et y. Or, en vérifiant avec les valeurs du tableau, on trouve que ce n'est pas le cas.

Conclusion : X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Déterminer les lois de probabilité de chacune des variables aléatoires X et Y.

Pour X :

- P(X=0) = 0,09
- P(X=1) = 0,01 + 0,12 + 0,15 + 0,03 = 0,31
- P(X=2) = 0,03 + 0,15 + 0,1 + 0,08 = 0,36
- P(X=3) = 0,05 + 0,03 + 0,07 + 0,02 = 0,17

Pour Y :

- P(Y=0) = 0,11
- P(Y=1) = 0,02 + 0,12 + 0,15 + 0,03 = 0,32
- P(Y=2) = 0,05 + 0,08 + 0,1 + 0,07 = 0,30
- P(Y=3) = 0,04 + 0,15 + 0,08 + 0,02 = 0,29

6. On définit la variable aléatoire Z par Z = X + Y.

a. Donner une interprétation concrète de cette variable aléatoire.

Z représente le nombre total de variétés de fruits et légumes consommées par une personne interrogée.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

Il faut calculer les probabilités pour chaque valeur possible de Z (de 0 à 6).

c. Déterminer P(Z ≥ 5). Donner une interprétation concrète du résultat.

Il s'agit de calculer P(Z=5) + P(Z=6). On peut utiliser les probabilités de X et Y pour calculer cela.

7. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z.

L'espérance est donnée par E(Z) = Σ z * P(Z=z). On doit multiplier chaque valeur de Z par sa probabilité et faire la somme.

Interprétation : L'espérance représente la consommation moyenne de variétés de fruits et légumes par personne.

Exercice 2

Partie A

1.a. Exprimer l'espérance mathématique de la variable aléatoire F en fonction de p.

E(F) = p.

1.b. Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de la variable aléatoire F ?

La loi binomiale peut être approximée par une loi normale si n est grand.

2. L'enquête révèle 16,8 % de « oui ».

On a p = 0,168. Pour un intervalle de confiance de 95 %, on utilise la formule : IC = p ± z * √(p(1-p)/n).

Calculons l'intervalle :

- n = 1000
- z ≈ 1,96 (pour 95 %)
- IC = 0,168 ± 1,96 * √(0,168 * 0,832 / 1000)

Intervalle final arrondi à 10^-3 près.

Partie B

1. Déterminer la probabilité qu'aucun individu de l'échantillon ne respecte les recommandations.

P(X=0) = (1-p)^n = (1-0,17)^10.

2.a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

X suit une loi binomiale B(n=200, p=0,17).

2.b. Justifier que la loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi normale.

Pour n grand et p pas trop proche de 0 ou 1, on peut approximer par une loi normale avec μ = np et σ^2 = np(1-p).

2.c. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 30 et 40 individus de l'échantillon qui consomment au moins 400 grammes.

On utilise la loi normale pour calculer cela, en normalisant les valeurs.

Exercice 3

1.a. Donner le coefficient de corrélation linéaire entre les variables statistiques T et M.

On utilise la formule du coefficient de corrélation. Calculer les valeurs nécessaires à partir des données fournies.

1.b. Expliquer pourquoi l'ajustement linéaire ne convient pas.

Les points ne semblent pas suivre une tendance linéaire claire, ce qui justifie l'usage d'une autre méthode d'ajustement.

2.a. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables T et Z.

Calculer en utilisant les valeurs de Z obtenues par transformation.

2.b. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de Z en T.

Utiliser les formules des moindres carrés pour obtenir l'équation.

2.c. En déduire une expression de m en fonction de t.

Transformez l'équation de Z en M.

2.d. Donner une estimation de la consommation moyenne quotidienne de pain par adulte en 1935.

Utiliser l'équation trouvée pour estimer M pour T correspondant à 1935.

2. Synthèse finale

Erreurs fréquentes :

- Ne pas vérifier la somme des probabilités.
- Confondre indépendance et dépendance des variables.
- Ne pas justifier les étapes de calcul.

Points de vigilance :

- Lire attentivement chaque question.
- Vérifier les arrondis demandés.
- Utiliser les formules appropriées pour les lois de probabilité.

Conseils pour l'épreuve :

- Organiser son temps pour chaque question.
- Utiliser des schémas ou tableaux pour clarifier les réponses.
- Relire les réponses pour éviter les erreurs d'inattention.